14 Razredi konjugiranosti. Normalizator elementa. Cauchyev izrek.

Definicija (relacija konjugiranosti)

Naj bo G grupa in naj bosta $a, b \in G$. Pravimo, da je element a konjugiran elementu b, če obstaja element x t.d. $a = x^{-1}bx$. Če je a konjugiran elementu b, pišemo $a \sim b$ in to relacijo '$\sim$' imenujemo relacija konjugiranosti na grupi G.

Npr. V grupi S_3, je element (123) je konjugiran elementu (132), saj imamo $(123) = (23)^{-1}(132)(23)$.

1. Pokaži, da sta dva elementa x, y grupe G v relaciji konjugiranosti če in samo če $x = ab$ in $y = ba$ za neka ustrezna elementa a, b grupe G.

Izrek. Relacija konjugiranosti na grupi je ekvivalenčna relacija.

2. Dokaži izrek zgoraj.

Vemo, da ekvivalenčna relacija na množici porodi particijo množice v medsebojno disjunktne ekvivalenčne razrede.

Definicija (razredi konjugiranosti)

Naj $C(a)$ označuje ekvivalenčni razred elementa a grupe G glede na relacijo konjugiranosti $\sim$ na grupi G. Množico $C(a)$ imenujemo razred konjugiranosti elementa a v grupi G.

$$C(a) = \{b : b \in G \text{ in } b \sim a\} = \{b : b \in G \text{ in } b = x^{-1}ax \text{ za neki } x \in G\}$$

$$= \{x^{-1}ax : x \in G\}.$$

Ker je relacija '$\sim$' refleksivna, $a \in C(a)\ \ \forall a \in G$. Velja tudi $C(a) \subseteq G\ \ \forall a \in G$, $G = \cup_{a\in G}\{a\} \subseteq \cup_{a\in G}C(a) \subseteq G$, $G = \cup_{a\in G}C(a)$. Naj bo G končna grupa in $G = \cup_{i=1}^{t}C(a_i)$, kje so ekvivalenčni razredi $C(a_1)$, $C(a_2)$, ..., $C(a_t)$ medsebojno disjunktni.

$$o(G) = \sum_{i=1}^{t} o(C(a_i))$$

Npr. $C(e) = \{x^{-1}ex : x \in G\} = \{x^{-1}x : x \in G\} = \{e\}$.

3. Če je G abelska pokaži, da je potem $C(a) = \{a\}\ \ \forall a \in G$.

4. Če je N edinka grupe G in $a \in N$, pokaži, da je $C(a) \subseteq N$, $\forall a \in N$. Če je N končna, pokaži, da je potem $o(N) = \sum_{a\in N} o(C(a))$, kjer vsota teče po elementih a, ki so predstavniki razredov konjugiranosti, ki usebujejo več od enega elementa.

5. Naj bo G grupa ki usebuje element končnog reda n ($n > 1$) in natanko dva razreda konjugiranosti. Pokaži, da je G končna grupa reda 2.

Definicija (normalizator elementa)

Naj bo G grupa. Za $a \in G$, množici $\{x \in G : ax = xa\}$ pravimo normalizator elementa $a \in G$, in jo označujemo z $N(a)$.

Normalizator elementa a torej vsebuje vse tiste elemente grupe G ki komutirajo z a.

Pripomba. (a.) Imamo $ex = xe\ \ \forall x \in G$. Odtod $N(e) = G$. (b.) Če je G abelska in $a \in G$, potem $ax = xa\ \ \forall x \in G$. Odtod $N(a) = G\ \ \forall a \in G$.

Izrek. Naj bo G grupa. Za poljubni $a \in G$, je normalizator $N(a)$ elementa a v grupi G podgrupa grupe G.

Pripomba. Normalizator $N(a)$ ni nujno edinka v grupi G.

6. Poišči grupo G in element $a \in G$ tako da $N(a)$ ni edinka v G.

7. Naj a element grupe G. Pokaži, da je ciklična podgrupa grupe G generirana z a, edinka grupe $N(a)$.

Izrek. Če je G končna grupa in $a \in G$, potem je $o(C(a)) = \dfrac{o(G)}{o(N(a))}$.

8. Dokaži izrek zgoraj.

Izrek. Če je G končna grupa, potem je $o(G) = \sum_a \dfrac{o(G)}{o(N(a))}$, kjer vsota teče po elementih a, ki so predstavniki razredov konjugiranosti.

9. Dokaži izrek zgoraj.

10. Določi število razredov konjugiranosti ne-abelske grupe reda p^3, kje je p praštevilo.

Izrek. Če je G končna grupa, potem je $o(G) = o(Z) + \sum_{a \notin Z} \dfrac{o(G)}{o(N(a))}$, kjer vsota teče po elementih a, ki so predstavniki razredov konjugiranosti, ki usebujejo več od enega elementa.

11. Dokaži izrek zgoraj.

Izrek. Če je $o(G) = p^n$, kje je p praštevilo in n naravno število, potem je center $Z \neq \{e\}$.

12. Dokaži izrek zgoraj.

13. Če je G ne-abelska grupa reda 343, pokaži da je potem $o(Z) = 7$.

Definicija (Cauchijev izrek za abelske grupe)
Naj bo G končna abelska grupa in naj p deli $o(G)$, kje je p praštevilo. Potem obstaja element $a \in G$ $(a \neq e)$ t.d. $a^p = e$.

Definicija (Cauchijev izrek)
Naj bo G končna grupa in naj p deli $o(G)$, kje je p praštevilo. Potem obstaja element $a \in G$ $(a \neq e)$ t.d. $a^p = e$ (obstaja element reda p).

14. Dokaži Cauchijev izrek zgoraj.

15. Če je G grupa reda $2p$, kje je p praštevilo, potem ima G edinko reda p.

16. Naj bosta p in q praštevili. Pokaži, da je abelska grup reda pq ciklična.

17. Pokaži, da je vsaka abelska grupa reda 6 ciklična.

18. Poišči, vse ne-abelske grupe reda 6.

Izrek. Dokaži obrat Lagrange-ovog izreka za končene abelske grupe (če m deli red grupe G, potem obstaja $H \leq G$ reda m).

19. Dokaži izrek zgoraj.

20. Naj bo G končna grupa reda p^n, kje je p praštevilo. Pokaži, da ima G podgrupo reda 1, p, p^2, ..., p^n.